

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

CONCOURS INTERNE

MARDI 14 JUIN 2022

1^{ère} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 5 heures – Coefficient : 5

Une composition rédigée en cinq heures sur un sujet d'ordre général relatif à l'évolution des idées et des faits politiques, économiques, sociaux et culturels en France et dans le monde permettant d'apprécier l'aptitude du candidat à exprimer sur le sujet proposé tant une analyse des faits et des événements qu'une interprétation personnelle et argumentée.

SUJET

- **Les enjeux de la fin de vie.**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

CONCOURS EXTERNE ET EXTERNE SPECIAL dit «Talents»

MARDI 14 JUIN 2022

1^{ère} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 5 heures – Coefficient : 5

Une composition rédigée en cinq heures sur un sujet d'ordre général relatif à l'évolution des idées et des faits politiques, économiques, sociaux et culturels en France et dans le monde permettant d'apprécier l'aptitude du candidat à exprimer sur le sujet proposé tant une analyse des faits et des événements qu'une interprétation personnelle et argumentée.

SUJET

- La neutralité n'est-elle qu'un renoncement ?

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

TROISIEME CONCOURS

MARDI 14 JUIN 2022

1^{ère} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 5 heures – Coefficient : 5

Une composition rédigée en cinq heures sur un sujet d'ordre général relatif à l'évolution des idées et des faits politiques, économiques, sociaux et culturels en France et dans le monde permettant d'apprécier l'aptitude du candidat à exprimer sur le sujet proposé tant une analyse des faits et des événements qu'une interprétation personnelle et argumentée.

SUJET

- **Le travail est-il toujours une valeur centrale aujourd'hui ?**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit « Talents » - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

JEUDI 16 JUIN 2022

3^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

DROIT PUBLIC

SUJET

- La régulation et le service public.

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

JEUDI 16 JUIN 2022

3^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

SANTE PUBLIQUE

SUJET

- **Quelles réponses apporter à la problématique de l'offre de soins dans les territoires ?**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

JEUDI 16 JUIIN 2022

3^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

SCIENCES ECONOMIQUES

SUJET

- **Quel(s) Financement(s) pour la Croissance ?**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

JEUDI 16 JUIN 2022

3^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

Mathématiques

SUJET : pages 1 à 4

Exercice 1

Partie A

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que la matrice S est orthogonale.
2. Justifier sans aucun calcul que S est diagonalisable.
3. Démontrer que, si f est un endomorphisme orthogonal, alors son spectre vérifie :

$$Sp(f) \subset \{-1; 1\}$$

4. Calculer le déterminant de f .
En déduire que -1 est valeur propre de f .
5. Déterminer l'ensemble E_{-1} des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 .
6. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f .
7. En déduire f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B

On s'intéresse aux matrices de la forme $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & a & b \\ -b & b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

1. Justifier que l'ensemble $E = \{M_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel dont on précisera une base.
2. Calculer le déterminant de $M_{a,b}$.
A quelles conditions sur a et b la matrice $M_{a,b}$ est-elle inversible ?
3. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice est orthogonale. Vous préciserez pour chaque cas la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme associé.

Exercice 2

Partie A

1. On considère les équations différentielles, de fonction inconnue f de variable réelle x

$$(H) \quad f'(x) + xf(x) = 0 \quad \text{et} \quad (E) \quad f'(x) + xf(x) = x^3$$

(a) Donner l'unique solution f de (H) telle que $f(0) = 1$

(b) Donner les solutions générales g de (E).

2. (a) Justifier que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est convergente.

(b) Exprimer $J = \iint_{[0;+\infty[\times [0;+\infty[} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$ en fonction de I .

(c) Calculer J en effectuant un changement de variable en coordonnées polaires et en déduire $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Partie B

Soit la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1. Donner $F(0)$.

2. Étudier la parité de F .

3. (a) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Justifier que la fonction h est dérivable, puis donner une expression de sa dérivée.

(b) Calculer la dérivée de la fonction F . Préciser la valeur de $F'(0)$.

(c) Donner un problème de Cauchy dont F est l'unique solution.

4. (a) Donner le signe de la fonction F' sur \mathbb{R} .

(b) Déterminer la limite de la fonction F quand x tend vers $+\infty$.

(c) Donner le tableau de variations de F sur \mathbb{R} .

5. On considère la série entière :

$$\sum_{p \geq 0} \frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

On note G sa somme sur l'intervalle de convergence.

(b) Donner le développement en série entière de la dérivée de G .

(c) Montrer que la fonction G vérifie la même équation différentielle que F .

(d) En déduire que $F = G$.

Exercice 3

1. On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Justifier qu'elle est convergente. Est-elle absolument convergente ?

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto (-1)^n e^{-nt}$ définie sur $]0; +\infty[$.

(a) Étudier la convergence simple de f_n sur $]0; +\infty[$.

(b) Justifier que f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$ et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

3. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(a) Montrer que la série est simplement convergente sur $]0; +\infty[$ et que sa somme est :

$$S(t) = \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}}$$

(b) Justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

(c) Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle pour affirmer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} dt \right) \quad ?$$

(d) Considérons le reste $R_n : t \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R_n = \frac{(-1)^{n+1} e^{-nt}}{1 + e^t}$.

En déduire que R_n converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; +\infty[$.

En utilisant le théorème de convergence dominée, justifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} R_n(t) dt = 0$$

(e) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Exercice 4

Pour tout réel $k \in [0; +\infty[$, on définit sur \mathbb{R}^2 la fonction

$$f_k : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + kxy - 2x - 2y.$$

1. Soit l'ensemble $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_0(x, y) \leq 0\}$.
 - (a) Représenter graphiquement l'ensemble \mathcal{A} dans le plan.
 - (b) L'ensemble \mathcal{A} est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ? Justifier brièvement.
 - (c) L'ensemble \mathcal{A} est-il borné ? compact ? Justifier brièvement.
2.
 - (a) Démontrer que, pour tout réel $k \in [0; +\infty[$, la fonction f_k est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
 - (b) Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y)$ de f_k en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 .
 - (c) Discuter suivant la valeur de k le nombre de points critiques de la fonction f_k .
 - (d) Énoncer le théorème qui vous permet sans les calculer de justifier que les deux dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ sont égales pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vous veillerez à préciser les hypothèses.
 - (e) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donner une expression des dérivées partielles secondes notées

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}(x, y), \quad s(x, y) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad t(x, y) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2}(x, y).$$

- (f) En déduire que la fonction f_k admet lorsque $k > 2$ un minimum que l'on précisera.
- (g) Dans le cas $k = 2$, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_2(x, y) \geq 1$.

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUIN 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

DROIT HOSPITALIER

SUJET

- **Service public hospitalier et établissements de santé.**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUI 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUI 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

DROIT CIVIL

SUJET

- **Le crédit et la protection du consommateur.**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUIN 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

FINANCES PUBLIQUES

SUJET

- **La certification des comptes des collectivités territoriales est-elle utile ?**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUIN 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

Législation de sécurité sociale et aide sociale

SUJET

- **Les freins financiers à l'accès aux soins en France : bilan et perspectives**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUIN 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

SOCIOLOGIE

SUJET

- **L'âge fait-il la génération ?**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» – INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUIN 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

HISTOIRE

SUJET

- **Industrie et développement économique en Europe et aux Etats-Unis du milieu du XIX^{ème} siècle à nos jours.**

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUIN 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

GESTION COMPTABLE ET FINANCIERE DES ENTREPRISES

SUJET : pages 1 à 5

Exercice I. Cas Hospital

Monsieur Barrot envisage de réaliser un nouveau processus de production dans le domaine de la radioscopie au début N.

1. Citer en quelques lignes les objectifs d'un plan de financement.
2. Pour les années N à N+2, présenter le plan de financement de ce projet sans tenir compte des financements externes.
3. Présenter le plan de remboursement de l'emprunt destiné au financement de l'investissement : mentionner la dette de début de période ; les charges d'intérêts ; les remboursements ainsi que l'annuité constante pour chaque période dans un même tableau (arrondir les calculs à l'euro le plus proche).
4. Ajuster le plan de financement en prenant en compte les moyens de financement externes de l'investissement.
5. Commenter les résultats obtenus.
6. D'une manière générale, quelles raisons peuvent pousser un dirigeant à privilégier l'emprunt comme mode de financement externe des investissements ?

Annexe :

Montant global de l'investissement..... 540 000 €
Cession début N d'un matériel ancien complètement amorti (net d'IS) 22 500 €
Chiffre d'affaires additionnel prévu (années N à N+2) 1 620 000 €
Le taux de marge sur coût variable sera 30 %.
Les charges fixes d'exploitation seront de 270 000 € par an dont 90 000 € d'amortissements.
Le taux de l'impôt sur les bénéfices est 33 1/3 %.

Le BFRE (besoin en fond de roulement d'exploitation) représentera 100 jours de chiffre d'affaires HT en N. Il devrait se maintenir au même niveau en N+1 et N+2.

Il sera versé aux actionnaires un montant de dividendes de 39 750 € en N+1 et 36 000 € en N+2.

Pour financer son investissement, l'entreprise contracte un emprunt de 300 000 € en début de N au taux de 5 % remboursable par annuités constantes sur 5 ans. Elle procède à la même date à une augmentation de capital d'un montant de 450 000 €.

Exercice 2.

L'entreprise SunLux est une PME de 30 personnes implantée en Auvergne. Son métier est la conception, la fabrication et la commercialisation de matériel d'éclairage à destination des cliniques.

Le marché :

Les prix de vente des produits sont en baisse en raison d'importations massives en provenance de nouveaux pays où le coût de la main d'œuvre est beaucoup moins élevé.

L'envol du coût de certaines matières premières augmente les prix des nombreux composants achetés.

Certains clients pratiquent le système des « enchères inversées » sur internet. Ils réunissent leurs fournisseurs potentiels autour d'un principe simple consistant à proposer le moins cher pour emporter le marché. En N-1, un client important a ainsi été perdu.

Processus productif :

À partir d'un cahier des charges arrêté avec le client, Sunlux achète les composants, effectue les opérations de peinture, câblage et assemblage. Elle travaille en juste à temps et en étroite collaboration avec ses fournisseurs et sous-traitants.

Objectifs :

Rompre avec la baisse continue depuis 3 ans de sa marge brute. Le principal indicateur d'alerte de la direction est le « taux de marge brute », c'est-à-dire : (chiffre d'affaires - coût de production direct)/chiffre d'affaires.

En N, l'entreprise envisage de délocaliser une partie de sa production.

Dans un premier temps, le contrôleur de gestion vous demande votre appréciation sur les méthodes de calcul de coûts des produits de l'entreprise pour N.

Dans un second temps, il sollicite votre avis pour confirmer des choix stratégiques importants relatifs aux produits, dictés par l'évolution rapide du marché.

Projections N initiales dictées par le marché :

Produits	A	B	C	S
Quantités vendues	10 000	15 000	40 000	35 000
Prix de vente unitaire HT en euros	100	58	67	132

Budget des charges directes par produit

	A	B	C	D
Coût direct des composants en euros	16	21	25	46
MOD (20 euros/h)	0,8	0,15 h	0,2 h	0,5 h
Autres charges directes en euros		2,00	1,00	1,16

Budget des charges indirectes

Centres	Coût total en euros	Nature de l'UO
Approvisionnement	1 542 500	100 euros de composant utilisés
Ateliers	2 681 250	Heure de MOD
administration	917 000	100 euros de CA

Le contrôleur de gestion soucieux d'améliorer la pertinence du calcul des coûts, vous donne les éléments d'une étude pour la construction d'un nouveau système de mesure ou méthode des coûts par activités (ABC).

L'analyse des charges indirectes prévisionnelles de l'année N a conduit après simplifications à l'identification de 6 activités.

Activités	Inducteurs de coûts	Charges en euros
Gestion des composants	Références composants utilisés	627 380
Peinture	Lots de produits entrés en fabrication	1 213 520
Câblage	Heures de MOD	1 042 750
Assemblage	Heures de MOD	852 000
Gestion des clients	Nombre de livraisons	623 100
Administration	Références fabriquées	782 000

Organisation de la production :

	A	B	C	D
Production prévue en unités	10 000	15 000	40 000	35 000
Lots de 1000 unités	10			28
Lots de 500 unités			80	10
Lots de 100 unités		150		10
Lots de 50 unités				20
Nombres de livraisons	4	30	80	20

Imputation du coût de l'inducteur référence composant :

	A	B	C	S
Coût unitaire imputé	1,80	4,24	2,43	12,82

Le nombre de composants utilisés pour l'ensemble des quatre produits est de 30. Cet inducteur est imputé sur les produits utilisateurs du composant en tenant compte des volumes consommés et des produits concernés.

À partir des nomenclatures, on obtient l'imputation par produit suivante (valeurs arrondies) :

QUESTIONS

1. Calculer, en unitaire, le coût direct par produit, le taux de marge brute et le taux de marge moyen pour l'année N.
2. Calculer les coûts de revient complets unitaires et les résultats unitaires pour l'année N. vous n'oublierez pas de préciser le temps de gamme et le temps total.
3. Commenter vos résultats.
4. Calculer le coût unitaire de chaque inducteur (à l'euro près).
5. Calculer les coûts unitaires moyens des luminaires selon la méthode ABC (vous indiquerez dans un tableau les inducteurs de couts, les charges en euros, le volume des inducteurs et le cout unitaire).
6. Chiffrer l'impact de la taille des lots sur le coût du produit D. Discuter de la pertinence de l'utilisation d'un coût moyen dans ce cas.
7. Pour chaque produit, justifier et commenter l'importance ou la faiblesse de l'écart de coût constaté entre les deux méthodes.
8. Dans une note, expliquer l'origine de tels écarts, préciser l'intérêt de la méthode ABC pour la prise de décision, indiquer si cette méthode vous paraît conceptuellement différente des méthodes traditionnelles et conclure en précisant dans quels contextes la méthode ABC vous paraît être la plus pertinente.
9. Calculer le coût attribuable du luminaire A si la société Lux choisit conjointement la délocalisation de sa production en N et de s'approvisionner auprès du sous-traitant installé en Roumanie (voir annexe).
10. Ce mode de calcul vous paraît-il suffisant pour donner un avis ?

Annexe :

Luminaire A

Hypothèse de travail : On considérera pour cette étude que les coûts unitaires des inducteurs sont rationnels.

• Le luminaire A est considéré comme le produit de référence du marché de l'éclairage. Il est très banal, bien que des différences de qualité puissent être constatées selon sa provenance. Sa vente a représenté jusqu'à 15 % de l'activité. Son coût de production direct est composé de main d'œuvre pour moitié.

En N-1, la concurrence extrêmement forte sur ce produit, a contraint l'entreprise à baisser fortement ses prix.

Modèles	A	B	C	D
Coût unitaire imputé	1,80 €	4,24 €	2,43 €	12,82 €

Le pilotage des coûts : méthode des coûts par activités (ABC)

• Deux projets d'évolution sont à l'étude :

– délocaliser la production du luminaire A à partir de N au Slovénie avec un coût direct moindre. Le coût de la main d'œuvre directe y est 10 fois inférieur à celui prévu en France. A l'effet baisse du coût du travail, s'ajoute celui des charges indirectes locales de production, réduites à 15 € par luminaire fabriqué, suite à une réorganisation du processus productif (en faisant le choix de l'aluminium plus léger que l'acier). Cette préférence atténue la hausse du prix des composants. À ce coût total de production, il convient d'ajouter les coûts internes à la société Lux concernant la gestion des références et celle des modèles pour connaître le coût total attribuable au produit ;

– profiter de la délocalisation du principal sous-traitant français du groupe qui a monté une usine en Roumanie. Il serait en mesure d'offrir le montant total des composants nécessaires à ce type de produit à un prix 30 % inférieur à celui des composants prévus pour N.

Exercice 3.

La société Plastym et la société Agro sont des filiales d'une même société mère. Dans le cadre de la politique du groupe, la société Plastym doit, en particulier, réserver annuellement 300 tonnes de sa production de films plastiques de type Q pour la société Agro. Le prix de transfert est défini comme étant le coût de revient complet standard supporté par la société Plastym.

La société Agro, à partir des films plastiques Q qui lui sont livrés en rouleaux, obtient des liasses de sacs de congélation. Avec 300 tonnes de films Q, elle obtient 300 tonnes de liasses. La société Agro ne vend des liasses qu'à l'extérieur du groupe.

Pour l'année à venir, les informations prévisionnelles suivantes ont été collectées :

- Chez la société Plastym :

Prix de vente du film Q sur le marché externe au groupe 4 780 € la tonne

Coût standard de production (sur la base d'une production normale de 2 300 tonnes de films Q) :

– variable : 1 000 € par tonne

– fixe : 3 000 € par tonne

Volume prévu des ventes de films Q (y compris partie réservée) : 2 300 tonnes

Capacité de production encore disponible de films Q : 3 tonnes

- Chez la société Agro :

Prix de vente des liasses sur le marché européen : 5 100 € la tonne

Frais de transformation des films en liasses :

– variable : 100 € par tonne

– fixe pour une production normale de 300 t : 300 par tonnes

Capacité de production totale de liasses : 350 tonnes

QUESTIONS

1. Calculer le résultat dégagé par la société Plastym sur les ventes de films Q et le résultat dégagé par la société Agro sur les ventes de liasses.

2. L'addition de ces deux résultats (prévisionnels ou historiques) donne le résultat « apparent » du groupe pour ces deux entités. Ce résultat « apparent » reflète-t-il toujours la performance réelle d'Agro et de Plastym ? Illustrer vos propos en envisageant successivement :

– cas 1 : une activité de Plastym réduite à 2000 t suite à des difficultés techniques sur ses installations ;

– cas 2 : une réduction des achats d'Agro à 200 t, sans que Plastym puisse compenser ses ventes en externe.

Une opportunité commerciale, non prévue lors des programmes prévisionnels, s'offre aux responsables de la société Agro, sous la forme d'une vente globale possible (vers un pays d'Asie du Sud-Est) de 40 tonnes de liasses de sacs de congélation, au prix de 4 500 € la tonne. Le lancement éventuel de cette commande ne nécessiterait pas un accroissement des charges de structure, et n'entraînerait pas de phénomène d'économie (ou de déséconomie) d'échelle.

3. Les responsables de la société Agro accepteront-ils cette commande marginale (justifier la réponse) ?

4. Les responsables de la société mère ont été informés de cette opportunité. Appuieront-ils la décision des responsables de la société Agro (justifier la réponse) ?

**CONCOURS OUVERTS LES 14, 15, 16 ET 17 JUIN 2022 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents» - INTERNE
ET TROISIEME CONCOURS**

VENDREDI 17 JUIN 2022

4^{ème} Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

STATISTIQUES

SUJET : pages 1 à 3

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Notations et Quantiles

- soit X une variable aléatoire : $\mathbb{E}(X)$ désigne l'espérance de X
- le quantile d'ordre 0.975 d'une loi normale centrée réduite est approx. égal à 2
- le quantile d'ordre 0.95 d'une loi du χ^2 à 1 degrés de liberté est approx. égal à 4

Exercice 1 Probabilités conditionnelles (2 pts)

Un laboratoire pharmaceutique vend un test avec la notice suivante : si vous êtes malade, alors le test est positif avec probabilité $\alpha = 98\%$ (α est la sensibilité du test), si vous êtes sain, alors le test est positif avec probabilité $\beta = 3\%$ ($1 - \beta$ est la spécificité du test). On sait de plus que cette maladie touche un malade sur $\tau = 1000$ personnes.

- 1 (1 pt) Calculer la probabilité pour que le sujet soit sain, sachant que son test est positif ?
- 2 (1 pt) Calculer la probabilité pour que le sujet soit malade, sachant que son test est négatif ?

Exercice 2 Loys discrètes, Indépendance et Corrélation (3 pts)

On lance deux dés équilibrés et on considère les variables aléatoires indépendantes associées X_1 et X_2 correspondant aux résultats obtenus.

- 1 (0.5 pt) Rappeler la loi de X_1 et son espérance.
- 2 (0.5 pt) Déterminer la probabilité que les deux dés donnent le même résultat.
- 3 (0.5 pt) Déterminer la probabilité que le premier dé donne un résultat strictement supérieur au second.

On définit la variable aléatoire somme par $S = X_1 + X_2$ et la variable aléatoire différence par $D = X_1 - X_2$.

- 4 (0.5 pt) Calculer $\mathbb{E}[S]$, puis $\mathbb{E}[D]$.
- 5 (1 pt) Montrer que les variables aléatoires S et D sont décorrélées. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Lois continus (3 pts)

Soit X une variable aléatoire dont la densité f est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1 (0.5 pt) Montrer que f est bien une densité de probabilité.
- 2 (0.5 pt) Calculer $\mathbb{P}(1/4 \leq X \leq 3/4)$.
- 3 (0.5 pt) Déterminer la fonction de répartition F et retrouver le calcul précédent en utilisant F .
- 4 (0.5 pt) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- 5 (1 pt) Minorer $\mathbb{P}(1/4 \leq X \leq 3/4)$ grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4 Estimation (7 pts)

Dans l'industrie agro-alimentaire, on s'intéresse à la contamination du lait par un micro-organisme : les spores de clostridium. On souhaite estimer le nombre de spores dans 1ml de lait alors que l'on sait seulement tester si un tel échantillon contient ou non des spores. On note

- X_k le nombre de spores dans le k -ième échantillon,
- $Y_k = \mathbf{1}_{X_k=0}$, l'indicateur d'absence de spores dans le k -ième échantillon,
- $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, le nombre d'échantillons stériles.

On suppose que les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ($\mathbb{P}(X_1 = x) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!}$). Attention, on n'observe que les Y_k .

- 1 (2 pts) Donner les lois de Y_k et de S_n .
- 2 (2 pts) On note $p = \mathbb{P}(Y_k = 1)$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de p ? En déduire un estimateur de λ .
- 3 (3 pts) Donner des intervalles de confiance asymptotiques de niveau 95% pour p et λ .

Exercice 6 Test (2 pts)

Nous désirons savoir s'il existe, dans une population d'individus atteints d'une pathologie, un lien entre l'âge de l'individu et ses chances de guérison. Nous menons une enquête sur 1000 individus et obtenons les résultats ci-dessous

âge	guéris	non guéris
plus de 50 ans	240	260
moins de 50 ans	300	200

Étudier le lien entre les variables âge et statut de guérison, on pourra utiliser un test d'hypothèse associé à un risque de première espèce asymptotiquement égal à $\alpha = 0.05$.

Exercice 7 Régression linéaire (3 pts)

On considère le modèle $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$Y_i = \beta x_i + U_i, \quad \mathbb{E}[U_i] = 0, \quad \mathbb{E}[U_i^2] = \sigma^2, \quad \mathbb{E}[U_i U_j] = 0$$

où x_i est scalaire. Attention, le modèle ne contient pas d'ordonnée à l'origine.

1 (1 pt) Expliciter l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$ de β .

2 (1 pt) Soit l'estimateur $\check{\beta} = \sum y_i / \sum x_i$. Comparer $\hat{\beta}$ et $\check{\beta}$ en calculant leurs biais et leurs variances.

3 (1 pt) Sous quelle condition les variances sont-elles égales ?