Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 04, 05, 06 ET 07 JUIN 2019 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

JEUDI 06 JUIN 2019

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

SUJET : pages 1 à 5

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1. *(4 points)*

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $C(B) = \{M \in M_3(\mathbb{R}); MB = BM\}$ lorsque $B \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour $B \in M_3(\mathbb{R})$, $C(B)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A, en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et -1.
3. Déterminer le vecteur propre de A pour la valeur propre 1 ayant -1 pour 1ère coordonnée dans la base $\mathscr{C}$. On note v_1 ce vecteur propre.
4. Vérifier que $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre -1.
5. On définit $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer son inverse.
6. Calculer $T = P^{-1}AP$.
7. La matrice A est-elle diagonalisable ?
8. Établir que si $M \in M_3(\mathbb{R})$, on a $M \in C(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP \in C(T)$.
9. Déterminer une base de $C(T)$. *On pourra considérer une matrice* $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *et tester les conditions sur les coefficients de* N *pour que* $N \in C(T)$.
10. En déduire une base de $C(A)$. Que vaut $\dim(C(A))$?

Exercice 2. *(9 points)*

Partie I

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on considère l'intégrale impropre $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. On souhaite montrer que l'intégrale est convergente et établir quelques propriétés de la fonction Γ.

1. On montre d'abord que $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est convergente. Soit $a \in]0,1[$.
   (a) En faisant une intégration par parties établir que
   $$\int_a^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \frac{1}{\alpha}\left(e^{-1} - a^\alpha e^{-a}\right) + \frac{1}{\alpha}\int_a^1 x^\alpha e^{-x}dx.$$
   (b) Calculer la limite $\lim_{a\to 0^+}(a^\alpha e^{-a})$.
   (c) Justifier pourquoi $\int_a^1 x^\alpha e^{-x}dx$ admet une limite lorsque $a \to 0^+$.
   (d) En déduire que $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est convergente.
2. On souhaite montrer que $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est convergente. Soit $b \in]1,+\infty[$.
   (a) Justifier pourquoi $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x} = 0$. En déduire qu'il existe $B \in]1,+\infty[$ tel que pour $x \geqslant B$, on a $x^{\alpha-1}e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}$.
   (b) Montrer que si $b \geqslant B$, on a $\int_1^b x^{\alpha-1}e^{-x}dx \leqslant \int_1^B x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \left[-\frac{1}{x}\right]_B^b$.
   (c) En déduire que $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est convergente.
3. Conclure que $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est convergente.
4. Montrer que si $\alpha > 0$ on a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
5. Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II

Dans cette partie on fixe des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et on étudie la fonction

$$f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Pour plus de commodité on pose $f = f_{\alpha,\beta}$ dans cette partie.

1. Que vaut $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?
2. Calculer la limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ en faisant 3 cas : $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.
3. Calculer la dérivée de f sur $]0,+\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$. *On fera à nouveau 3 cas.*
4. En supposant $\alpha = 1$, calculer $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.
5. En supposant $\alpha > 1$, montrer que f admet un maximum égal à $\frac{\beta(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)e^{\alpha-1}}$ sur $\mathbb{R}$.
6. En faisant le changement de variable $y = \beta x$, calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
7. (a) On donne $e \simeq 2,7$. Montrer que $f_{2,2e}(1) < f_{1,2}(1) < f_{1,1}(1) < f_{2,e}(1)$.

(b) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe de f pour $(\alpha, \beta) = (1,1)$, $(1,2)$, $(2,e)$ et $(2,2e)$, pour les abscisses comprises entre 0 et 2.
On s'attachera à l'allure des courbes plus qu'à la précision numérique. On utilisera les informations des questions précédentes.

Partie III

Dans cette partie on fait varier les paramètres α et β en fonction de n et on étudie la suite de fonctions obtenue.

1. Dans cette question on fixe $\alpha = 2$ et on définit la suite $(g_n)_{n\geqslant 2}$ par $g_n = f_{2,ne}$ (voir la partie II pour la définition des fonctions $f_{\alpha,\beta}$).
   (a) Montrer que si $x > 0$ est fixé, on a $g_n(x) = \frac{1}{\Gamma(2)x}\frac{(nex)^2}{e^{nex}}$, en déduire $\lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.
   (b) Montrer que $(g_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
   (c) Établir que pour $n \geqslant 2$, on a $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = n$. A-t-on convergence uniforme de $(g_n)_{n\geqslant 2}$ vers la fonction nulle ?
2. Dans cette question on fixe $\beta = 1$ et on définit la suite $(h_n)_{n\geqslant 2}$ par $h_n = f_{n,1}$.
   (a) Écrire le développement en série entière de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. En déduire que si $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Montrer que la suite $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une fonction (à préciser) sur $\mathbb{R}$.
   (c) La suite $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge-t-elle uniformément ? *On pourra utiliser la formule de Stirling :* $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 3. *(4 points)*

Soit n un entier, $n \geqslant 2$, et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que les a_i ne sont pas tous égaux. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, (\mu, \sigma) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu - a_i)^2}{2\sigma^2}}.$$

On souhaite maximiser f sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $g = \ln \circ f$. Rappeler le sens de variation de ln sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que si $u = (\mu, \sigma) \in U$, u est un maximum local de f si et seulement si c'est un maximum local de g.
2. Pour $(\mu, \sigma) \in U$, calculer $g(\mu, \sigma)$.
3. Pour un point $u = (\mu, \sigma) \in U$, calculer le gradient $\nabla g(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mu}(u) \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma}(u) \end{pmatrix}$ de g en u.
4. Montrer que $u = (\mu, \sigma) \in U$ est un point critique de g si et seulement si
$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mu - a_i)^2 \end{cases}.$$
5. En déduire que g admet un unique point critique $u_* = (\mu_*, \sigma_*)$ et exprimer μ_* en fonction des a_i, σ_* en fonction des a_i et de μ_*.
6. Calculer la hessienne $H_g(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2}(u) & \frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial \sigma}(u) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma \partial \mu}(u) & \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2}(u) \end{pmatrix}$ de g pour $u \in U$.
7. On pose $H_* = H_g(u_*)$. Calculer H_* et montrer que g admet un maximum local en u_*.

Exercice 4. *(3 points)*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, on note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire, $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un sous-ensemble F de E.
On suppose que u est un endomorphisme non-nul de E tel que $\forall x \in E$, $< u(x), x >= 0$.

1. Donner un exemple d'un tel endomorphisme u lorsque $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard. *Dans la suite on ne suppose plus $E = \mathbb{R}^2$.*
2. Montrer que $\forall x, y \in E$ on a $< u(x), y >= - < x, u(y) >$.
3. Quelles sont les valeurs propres possibles pour u ?
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
5. Établir que $Ker(u) = (Im(u))^{\perp}$.
6. En choisissant une base orthonormale de $Ker(u)$ et une base orthonormale de $Im(u)$, expliquer comment construire une base orthonormale de E.
   Que peut-on dire sur la forme de la matrice de u dans une telle base de E ?