Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 04, 05, 06 ET 07 JUIN 2019 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

VENDREDI 07 JUIN 2019

4ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

STATISTIQUES

SUJET : pages 1 à 3

Examen de Statistique

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Notations et quantiles

— $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$

— soit X une variable aléatoire : $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ désignent respectivement l'espérance et la variance de X

— le quantile d'ordre 0.025 d'une loi gaussienne centrée réduite ($\mathcal{N}(0,1)$) est égal à -1.96

— le quantile d'ordre 0.975 d'une loi gaussienne centrée réduite ($\mathcal{N}(0,1)$) est égal à 1.96

— le quantile d'ordre 0.95 d'une loi du χ^2 à 1 degré de liberté est égal à 3.84

Exercice 1 Probabilités conditionnelles (1 pt)

1 (0.5 pt) Dans une famille qui comporte 2 enfants, l'un est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon ?

2 (0.5 pt) Nous supposons maintenant que l'aîné est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon ?

Exercice 2 Lois discrètes (1 pt)

Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre une porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. Nous appelons X le nombre d'essais pour ouvrir la porte.

1 (0.5 pt) Calculer la loi de probabilité de X.

2 (0.5 pt) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 3 Lois continues (2 pt)

La durée de vie en années d'un matériel hospitalier, notée X, suit une loi exponentielle de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{8} \exp\left(-\frac{x}{8}\right) \mathbb{I}_{x \geq 0}$$

1 (0.5 pt) Calculer la probabilité que le matériel ait une durée de vie supérieure à 8 ans.

2 (1 pt) Vous possédez ce matériel depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 8 ans à partir de maintenant ? Conclure.

3 (0.5 pt) Quelle est la durée de vie moyenne $\mathbb{E}(X)$ et sa variance $\mathbb{V}(X)$?

Exercice 4 Couple de variables aléatoires (3 pts)

Nous considérons un couple (X, Y) de variables aléatoires continues réelles de densité de probabilité :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y}{a^3} & \text{si} \quad x+y<a, \quad y-x<a, \quad y>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où a est une constante fixée strictement positive.

1 (0.5 pt) Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

2 (1 pt) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

3 (0.5 pt) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

4 (1 pt) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$.

Exercice 5 Estimation (6 pts)

Soient $N \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ $(\theta \in \mathbb{R})$, $X = \exp(N)$ et un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X.
X suit une loi log-normale de paramètre (θ, σ^2) :

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x) - \theta)^2\right\} \mathbb{I}_{x>0}.$$

Dans la suite, on suppose que $\sigma^2 = 1$.

1 (1 pt) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ.

2 (1 pt) Montrer que $\prod_{i=1}^n X_i$ suit une loi-lognormale de paramètre $(n\theta, n)$ et en déduire $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n)$ et $\mathbb{V}(\hat{\theta}_n)$.

3 (1 pt) Déterminer une fonction pivotale pour le paramètre θ.

4 (1 pt) Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau 95% pour le paramètre θ.

5 (2 pts) Donner l'estimateur $\tilde{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments basée sur $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 6 Intervalle de confiance et test (2 pts)

Nous considèrons un 100-échantillon $X_1, \ldots, X_{100}$ de $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ où le paramètre $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnu. Nous observons $\bar{x}_{100} = 0$.

1 (1 pt) Donner un intervalle de confiance unilatéral symétrique de niveau (de confiance) 95% pour θ. Nous noterons la réalisation de cet intervalle $\mathrm{IC}(\theta)$.

2 (1 pt) On souhaite tester $H_0 : \theta \leq 1$ contre $H_1 : \theta > 1$. Nous proposons d'utiliser une règle de décision basée sur l'intervalle calculé à la question précédente : nous rejetterons H_0 si l'intersection entre les intervalles $\mathrm{IC}(\theta)$ et $]-\infty, 1]$ est vide. Montrer qu'un tel test est de niveau (supremum du risque de première espèce) inférieur à 5% et calculer sa fonction puissance que nous noterons $\rho(\cdot)$.

Exercice 7 Test d'ajustement (2 pts)

À la suite du croisement de deux lignées d'une certaine variété de plantes, nous devrions obtenir 75% de plantes à fleurs rouges et 25% de plantes à fleurs blanches, si la couleur obéit à la loi de Mendel. Pour vérifier si cette loi s'applique à la couleur des fleurs dans le cas présent, nous avons mis en culture 500 plantes, dont 350 ont donné des fleurs rouges.

Pour un risque de première espèce asymptotiquement égal à $\alpha = 0.05$, tester la validité de la loi de probabilité résultant de la théorie de Mendel.

Exercice 8 Régression linéaire (3 pts)

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous considérons le modèle suivant

$$Y_i = \beta x_i + U_i$$

avec

— $\mathbb{E}[U_i] = 0$, $\mathbb{E}[U_i^2] = \sigma^2$ et $\mathbb{E}[U_i U_j] = 0$ si $i \neq j$,

— x_i est la valeur prise par une variable explicative quantitative pour le ième individu,

— β est un paramètre inconnu.

1 (1 pt) Expliciter l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}_n$ de β.

Nous considérons l'estimateur $\tilde{\beta}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ de β.

2 (2 pts) Montrer que

— $\hat{\beta}_n$ et $\tilde{\beta}_n$ sont des estimateurs sans biais de β,

— $\hat{\beta}_n$ est un meilleur estimateur de β du fait qu'il possède une variance plus petite.