CONCOURS OUVERTS LES 22, 23, 24 ET 25 JUIN 2021 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – EXTERNE SPECIAL dit «Talents » - INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

JEUDI 24 JUIN 2021

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

Mathématiques

SUJET (4 pages + celle-ci)

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1. *(6 points)*

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto n^\alpha x^n (1-x).$$

1. (a) *(0,25 points)* Montrer que la suite $(f_n(1))_{n \geqslant 0}$ converge et calculer sa limite.
   (b) *(0,5 points)* Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > 1$, la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 0}$ ne converge pas.
   (c) *(0,5 points)* Montrer que pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 0}$ converge et calculer sa limite.
   (d) *(0,5 points)* Déterminer l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R};$ la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 0}$ converge $\}$.
   (e) *(0,5 points)* Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur D vers une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ que l'on précisera.
2. On s'intéresse dans la suite aux fonctions f_n et f sur l'intervalle $D_0 = [0, 1]$.
   (a) On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
      i. *(0,5 points)* Calculer la dérivée de f_n sur D_0, puis son signe.
      ii. *(0,5 points)* En déduire le tableau de variations de f_n sur D_0.
      iii. *(0,5 points)* Calculer $M_n = \max_{x \in D_0} |f_n(x) - f(x)|$.
   (b) On souhaite (re)démontrer que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$ lorsque $n \to +\infty$.
      i. *(0,25 points)* Rappeler le développement limité à l'ordre 1 de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0. *On ne demande pas de démonstration.*
      ii. *(0,5 points)* En déduire la limite de $n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.
      iii. *(0,5 points)* Conclure.
   (c) *(0,5 points)* Etudier la convergence de $\frac{n^\alpha}{n+1}$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   (d) *(0,5 points)* Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ vers f sur D_0, suivant les valeurs de α.

Exercice 2. *(4 points)*

On souhaite calculer l'intégrale

$$I = \int_1^{\frac{5}{3}} \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} dx.$$

1. Soit $h : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2-1}$.
   (a) *(0,25 points)* Montrer que h est strictement croissante et calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
   (b) *(0,25 points)* On s'intéresse au graphe de h dans un repère orthonormé. Montrer que le graphe de h reste toujours en-dessous de la droite d'équation $y = x$.
   (c) *(0,5 points)* On donne les valeurs approchées $\sqrt{2} \simeq 1,4$; $\sqrt{3} \simeq 1,7$; $\sqrt{5} \simeq 2,2$. Tracer le graphe de h sur l'intervalle $[1, 5]$, dans un repère orthonormé.
   (d) *(0,5 points)* On fixe $u \in [1, +\infty[$. Calculer l'abscisse du point d'intersection du graphe de h avec la droite d'équation $y = -x + u$.
2. Soit $\varphi : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1+u^2}{2u}$.
   (a) *(0,25 points)* Calculer la dérivée de φ.
   (b) *(0,5 points)* Montrer que φ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
   (c) *(0,25 points)* Résoudre l'équation $\varphi(u) = \frac{5}{3}$ sur $[1, +\infty[$.
3. *(0,5 points)* Faire le changement de variable $x = \varphi(u)$ dans l'intégrale I.
4. *(0,5 points)* En déduire la valeur de I.
5. *(0,5 points)* Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} dx$$

converge et calculer sa valeur.

Exercice 3. *(6 points)*

L'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$, la transposée d'une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est notée $M^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
On note $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, *i.e.* on a $\langle w, w' \rangle = w^T.w' = \sum_{i=1}^3 w_i.w_i'$ pour $w = (w_i)_i, w' = (w_i')_i \in \mathbb{R}^3$, et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne : $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = \sqrt{w^T.w} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 w_i^2}$.
On note I_3 la matrice identité de taille 3.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est notée $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Soit la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. *(0,5 points)* Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X.I_3 - A)$ de A.
2. *(0,25 points)* Quelles sont les valeurs propres de la matrice A ?
3. *(0,25 points)* Trouver un vecteur propre v_1 de A pour la valeur propre -1.
4. *(0,25 points)* Montrer que la matrice A est orthogonale.
5. *(0,5 points)* En déduire que pour tout $v, w \in \mathbb{R}^3$, $< f(v), f(w) >=< v, w >$.
6. *(0,5 points)* Justifier que f est bijective et trouver la matrice de son inverse f^{-1} dans la base canonique.
7. *(0,5 points)* On note E l'orthogonal de v_1 *i.e.* $E = \{v \in \mathbb{R}^3 ; < v, v_1 >= 0\}$.
   Montrer que E est stable par l'application f, c'est-à-dire que $f(E) \subset E$.
8. *(0,25 points)* Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E.
9. *(0,5 points)* On note $f|_E$ la restriction de f à E.
   Déterminer la matrice B de $f|_E$ dans la base $\mathcal{B}$.
10. *(0,5 points)* Trouver un réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice B soit égale à $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
11. *(0,25 points)* Quelle transformation géométrique subit un vecteur $v \in E$ lorsqu'on lui applique f ?
12. *(0,5 points)* Soit $\mathcal{D}$ la famille de vecteurs composée de v_1 et des vecteurs de $\mathcal{C}$.
    Montrer que $\mathcal{D}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
13. *(0,25 points)* Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{D}$.
14. *(0,5 points)* La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
15. *(0,5 points)* Sans faire de calculs, déterminer la transformation $f^{12} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{composée 12 fois}}$.

Exercice 4. *(4 points)*

On fixe $n \geqslant 1$ et on définit la fonction

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i(\ln(x_i) - 1)$$

avec $U = (\mathbb{R}_+^*)^n$.
On s'intéresse à la recherche des minimums éventuels de f sur U.

1. (a) *(0,25 points)* Calculer le gradient $\nabla_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$ de f en un point $x = (x_i)_i$ de U.

   (b) *(0,5 points)* En déduire que f admet un unique point critique sur U.
   On le note a dans la suite.

   (c) *(0,25 points)* Calculer la hessienne $H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$ en un point $x \in U$.

   (d) *(0,25 points)* Montrer que la fonction $x \mapsto x(\ln(x) - 1)$ est toujours supérieure à -1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (e) *(0,25 points)* Calculer $f(a)$.

   (f) *(0,5 points)* Conclure que a est un minimum global de f sur U. Y a-t-il d'autres minimums locaux ?

2. On s'intéresse à la convergence de l'algorithme du gradient : on fixe $u^0 \in \mathbb{R}^n$ et un pas $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit la suite $(u^k)_{k \geqslant 0}$ par $u^{k+1} = u^k - \nabla_f(u^k)$. On étudie des conditions pour assurer que la suite $(u^k)_{k \geqslant 0}$ converge vers a.
   Dans la suite on note $\| \cdot \|_\infty$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

   (a) *(0,5 points)* Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u^{k+1} - a = (Id - \rho.\nabla_f)(u^k) - (Id - \rho.\nabla_f)(a)$ où Id est l'identité de $\mathbb{R}^n$.

   (b) *(0,5 points)* On note $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \rho \ln(x)$.
   Justifier que pour $x' \geqslant x > 0$ on a $|g(x') - g(x)| \leqslant \left(\max_{z \in [x,x']} |1 - \frac{\rho}{z}|\right) |x' - x|$.

   (c) *(0,5 points)* On suppose dans la suite que $\rho < \frac{1}{2}$.
   Déduire que pour $x, x' \in J = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ avec $x \leqslant x'$ on a $|g(x') - g(x)| \leqslant \left(1 - \frac{2\rho}{3}\right) |x' - x|$.

   (d) *(0,5 points)* Conclure que pour $u^0 \in J^n$, la suite $(u^k)_k$ converge vers a.