CNG

CONCOURS OUVERTS LES 8, 9, 10 et 11 septembre 2020
POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'ETABLISSEMENTS SANITAIRES, SOCIAUX ET MEDICO-SOCIAUX

CONCOURS INTERNE, EXTERNE et 3ème CONCOURS

3ème EPREUVE D'ADMISSIBILITE
(Durée 4 heures – Coefficient 3)

Jeudi 10 septembre 2020

MATHEMATIQUES

SUJET :

Le sujet comporte 5 pages + celle-ci.

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1.

Dans l'exercice, la transposée d'une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tM \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, *i.e.* on a $\langle w, w' \rangle = \sum_{i=1}^{3} w_i.w'_i$ pour $w = (w_i)_i$, $w' = (w'_i)_i \in \mathbb{R}^3$, et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne : $\|w\| = \langle w, w \rangle = {}^tw.w = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} w_i^2}$.

Enfin la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est notée $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans l'exercice, on pourra librement admettre les résultats de la partie I dans la partie II.

Partie I

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le noyau de A, quelle est sa dimension ?
2. Exhiber un vecteur v_1 engendrant $\ker(A)$.
3. Calculer A^2. Montrer que -9 est une valeur propre de A^2.
4. Déterminer un vecteur propre v_2 de A^2 pour la valeur propre -9.
5. Calculer $v_3 = \frac{1}{3} A v_2$.
6. Vérifier que $< v_2, v_3 >= 0$, et que $\|v_2\| = \|v_3\|$.
7. On pose $v'_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Calculer les v'_i.
8. Montrer que $\mathcal{B} = (v'_1, v'_2, v'_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
9. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A pour matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
10. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

    Expliciter P.

Partie II

On s'intéresse au système différentiel $(E) : X' = AX$, avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivable.

On note $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

On note (F) l'équation $y'' = -9y$, où y est une fonction à valeurs réelles. On rappelle que les solutions (définies sur $\mathbb{R}$) de (F) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des constantes arbitraires.

1. Montrer que $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est solution de (E) ssi $Y = P^{-1}X$ est solution de l'équation $(E') : Y' = BY$.
2. Soient $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions. On suppose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ solution de (E').

   Écrire l'équation (E') en termes des y_i.
3. Quelle est la forme de la fonction y_1 ?
4. Que vaut y_2'' ? En déduire la forme de la fonction y_2.
5. En déduire la fonction y_3.
6. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_0$ où $\mathscr{C}_0$ est un cercle de $\mathbb{R}^2$ centré en l'origine dont on précisera le rayon r (éventuellement $r = 0$).
7. Conclure que si X est solution de (E), alors il existe un cercle $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in \mathscr{C}$.

Exercice 2.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + 8y^3 + 2xy$.
On s'intéresse aux extremums locaux de f.

1. Calculer le gradient $\nabla_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$ de f en tout point $a = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet 2 points critiques. On les note a_0 et a_1.
3. Pour $a \in \mathbb{R}^2$, calculer la hessienne $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \end{pmatrix}$.
4. Parmi les points a_0, a_1, lesquels sont des maximums locaux ? Des minimums locaux ?
5. (a) On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x,x)$. Dériver h puis étudier son signe.
   (b) Établir le tableau de variations de h.
   (c) On note D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = x$. La fonction f admet-elle un maximum sur D ? Un minimum sur D ? Des extremums locaux sur D ?

Exercice 3.

On souhaite calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)(1-\sin(x))}{1+\sin(x)} dx.$$

1. Soient $J = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$ et $K = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt$.
   (a) Calculer J.
   (b) Dériver la fonction $t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$ sur $[0, 1]$.
   (c) Calculer K par intégration par parties.
2. On définit $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$. Rappeler ce que vaut l'intervalle $D = \varphi([0, \frac{\pi}{2}])$.
3. Que vaut φ' ? En déduire que φ est C^1.
4. Faire le changement de variable $u = \varphi(x)$ dans l'intégrale I.
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 4.

On rappelle qu'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$ on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle également une version du théorème des accroissements finis : si f est C^1 sur $[0,1]$ alors pour tous $x, y \in [0,1]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \left(\max_{t \text{ entre } x \text{ et } y} |f'(t)| \right) |x - y|.$$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{L}$ alors f est bornée.
2. (a) Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}$, alors $f + g \in \mathcal{L}$.
   (b) Vérifier que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
3. (a) On note $\mathcal{E}^1$ l'espace des fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont C^1. A-t-on $\mathcal{E}^1 \subset \mathcal{L}$?
   (b) Montrer que la fonction racine carrée $c : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.
4. On définit l'application N sur $\mathcal{L}$ par

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

   et on souhaite montrer que N est une norme sur $\mathcal{L}$.
   (a) Montrer que si $N(f) = 0$, alors $f = 0$.
   (b) On pose $M(f) = \sup_{\substack{x, y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ pour $f \in \mathcal{L}$. Montrer que pour $f, g \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $M(f + g) \leqslant M(f) + M(g)$ et $M(\alpha f) = |\alpha| M(f)$.
   (c) Finir de montrer que N est une norme.
5. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
   On suppose également qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in [0,1]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant K|x - y|$.
   (a) Établir que f est lipschitzienne.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.