Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 9, 10, 11 ET 12 JUIN 2015
POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'ETABLISSEMENTS SANITAIRES, SOCIAUX ET MEDICO-SOCIAUX

CONCOURS INTERNE, EXTERNE et 3ème CONCOURS

3ème EPREUVE D'ADMISSIBILITE
(Durée 4 heures – Coefficient 3)

Jeudi 11 juin 2015
de 13 h à 17 h

MATHEMATIQUES

Sujet à traiter : **4 pages dont celle-ci.**

AUCUN DOCUMENT

I. Séries entières

Soit la série entière de terme général $v_n = a_n x^n$ et de rayon de convergence R strictement positif.

1. *A partir de la somme de la série, notée s, montrer que* $(n+2)a_{n+2} = -(n-2)a_n$ *pour* n *entier.*

2. *Déterminer la séquence des termes* $a_{2k}, k \geq 2$.

3. *On suppose que la somme s est solution de l'équation différentielle :*

$$f(x) - \frac{(x^2+1)}{2} f''(x) = 0, \quad s(0) = 0, \qquad s'(0) = 1.$$

   a. *Déduire les coefficients* a_0 *et* a_2.

   b. *Trouver l'expression générale des coefficients* a_n *pour* n *impair.*

   c. *Etablir la convergence de la série entière* v_n *sur l'intervalle* $[-1\,,1]$.

   d. *Trouver le rayon de convergence R de la série.*

4. Soit la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{s'(x) - 1}{x}, & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}.$$

   a. *Montrer que la fonction dérivée d'ordre 1 de g peut s'exprimer comme une fraction rationnelle.*

   b. *En déduire une autre expression pour* $g(x)$ *et décrire son tableau de variation.*

   c. *Trouver finalement l'expression de la somme* $s(x)$.

   d. *Calculer* $s(1)$.

II. Racines de polynômes

Soit le polynôme défini par :

$$P(x) = 6x^4 + x^3 + (10+6i)x^2 + (2+i)x - 2(2+i)$$

1. *Trouver les racines carrées de* $z = -2 - i$.

2. *Trouver les racines réelles de* $P(x)$.

3. *Déduire les autres racines du polynôme.*

III. Diagonalisation de matrices

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer les valeurs propres de A.*
2. *Déterminer les vecteurs propres associés.*
3. *A est-elle diagonalisable ?*
4. *A est-elle semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?*
5. *Calculer $B^n, n \in \mathbb{Z}$.*
6. *En déduire l'expression de $A^n, n \in \mathbb{Z}$.*

IV. Optimisation libre

Soit la fonction des variables x et y définie par :

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)} .$$

1. *Préciser le domaine de définition de la fonction f.*
2. *Déterminer le gradient de f.*
3. *Déterminer le hessien de f.*
4. *Trouver les points critiques de f.*
5. *Etudier la nature des points critiques obtenus.*

V. Fonctions vectorielles

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ défine par :

$$f(x,y) = (u,v) = \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} .$$

1. *Déterminer la fonction réciproque de la fonction f, notée f^{-1}.*

2. *Montrer que f est bijective.*

3. *Evaluer la matrice jacobienne de f au point (x, y), puis calculer son déterminant.*

4. *Evaluer la matrice jacobienne de f^{-1} au point (u, v), puis vérifier qu'elle est l'inverse de celle associée à f.*

5. *En déduire le déterminant de la matrice jacobienne de f^{-1}.*

6. Soient g l'application de R^2 dans R telle que $g(x, y) = e^{x^2-y^2}$ et h l'application composée telle que $h(u, v) = g(f^{-1}(u, v))$.

   a. *Déterminer les dérivées partielles de la fonction h* par rapport à u et v.

   b. *Etablir ce dernier résultat à partir des dérivées partielles de g et de la matrice jacobienne de f^{-1}.*

   c. Soit Δ le domaine du plan défini par : $\Delta = \{ (x, y), x > 0, x - 1 < y < 1 - x \}$.

      Déterminer le domaine image de Δ par f, noté Ω.

   d. *Utiliser le changement de variable f pour calculer l'intégrale de g sur Δ.*