Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 26, 27, 28 ET 29 MAI 2015 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS

JEUDI 28 MAI 2015

3ème Épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

MATHÉMATIQUES

IMPORTANT –
Dès la remise du sujet, les candidats sont priés de vérifier le nombre de pages et la numérotation.

EXERCICES A TRAITER : 4 pages (dont celle-ci)

.../...

I. Systèmes d'équations linéaires

Soit le système d'équations linéaires pour les inconnues w, x, y et z et pour le paramètre a :

$$S: \begin{cases} w + 2x + 3y + az = a - 1 \\ 2w + x + ay + 3z = 1 \\ 3w + ax + y + 2z = 0 \\ aw + 3x + 2y + z = 0 \end{cases}.$$

1. Mettre le système sous forme matricielle du type $AX = B$.

2. A est-elle carrée ? Est-elle symétrique ?

3. Trouver les valeurs de a pour lesquelles la matrice A n'est pas de rang plein (montrer notamment qu'il en est ainsi quand $a = 2$).

4. Pour chacune des valeurs a obtenues à la question précédente, résoudre le système S.

5. Trouver la solution quand S est un système de Cramer.

II. Extrema d'une fonction

Soit la fonction des variables x et y :

$$f(x, y) = xyln(x) + y^2 .$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Rechercher les points critiques de f.

3. Etudier la nature des *extrema* trouvés.

III. Endomorphismes

On considère l'endomorphisme f_a de E dans la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ défini par :

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & 2 - a & -a \\ -a & 1 & -a \\ 2 & -2 + a & 1 + a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f_a admet 1 pour valeur propre.

2. Déterminer une base pour le sous-espace propre associé, noté $E_1(a)$, en fonction des valeurs prises par a.

3. On considère les vecteurs :

$$h_1 = e_1 + e_2 - e_3 \qquad \text{et} \qquad h_2 = e_1 + e_2 - 2e_3.$$

a. Déterminer la dimension du sous-espace H de E engendré par $\{h_1, h_2\}$.

b. Etablir la stabilité de H par f_a.

c. Soit l'endomorphisme g_a défini pour tout $v \in H$ par :

$$g_a(v) = f_a(v).$$

Exprimer la matrice associée à g_a dans la base $\{h_1, h_2\}$.

4. Montrer que f_a admet aussi $(a-1)$ pour valeur propre.

5. Trouver un vecteur propre, h_3, associé à $(a-1)$ indépendant de a.

6. $\{h_1, h_2, h_3\}$ est-elle une base de E ?

7. Exprimer $f_a$dans une base de E.

8. f_a est-elle diagonalisable ?

IV. Intégration

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité de la fonction définie par :

$f(x) = x^m ln(x)^n, \qquad (m,n) \in \mathrm{N^*xN}$

2. On considère la suite d'intégrales d'élément générique :

$$I_{m,n}(a) = \int_a^1 x^m ln(x)^n dx.$$

a. Calculer $I_{m,0}(0)$ et établir sa convergence.

b. Etablir la relation entre $I_{m,n}(a)$ et $I_{m,n-1}(a)$ pour m entier strictement positif (après un passage à la limite).

c. En déduire la relation entre $I_{m,n}(a)$ et $I_{m,0}$.

d. Déterminer l'expression de $I_{m,n}(a)$ en fonction de n et m.

3. Par un raisonnement comparable, trouver l'expression de :

$$J_{m,n}(a) = \int_k^l (x-k)^m (x-l)^n dx, \qquad (k,l) \in \mathbb{R}^2, \quad (k,l) \in N^2.$$

V. Séries entières

Soit la série entière :

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de S d'après le critère de d'Alembert ?

2. Etudier le comportement de S quand $x \to 1$ et quand $x \to -1$.

3. Décomposer la fraction rationnelle :

$$Q(x) = \frac{1}{x(x+2)}.$$

4. Développer en série entière la fonction : $f(x) = ln(1-x)$ en $x = 0$.

5. Pour x dans son rayon de convergence, calculer :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

6. Pour x dans son rayon de convergence et non nul, établir l'équivalence :

$$V = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{(1-x^2)ln(1-x)}{2x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}.$$

7. Montrer que l'expression pour V peut être prolongée en $x = 0$.

8. En déduire les expressions des séries :

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \qquad Z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$