CNG

Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 7, 8, 9 et 10 JUIN 2016

POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'ETABLISSEMENTS SANITAIRES, SOCIAUX ET MEDICO-SOCIAUX

CONCOURS INTERNE - EXTERNE et 3ème CONCOURS

3ème EPREUVE D'ADMISSIBILITE

(Durée : 4 heures – Coefficient : 3)

Jeudi 9 juin 2016

MATHEMATIQUES

Important : Dès la remise du sujet, les candidats sont priés de vérifier le nombre de pages et la numérotation.

EXERCICES A TRAITER : 5 pages (dont celle-ci)

I. Fonctions, suites et séries (4 points)

On étudie d'abord la fonction donnée par :

$$f(x) = ln(1 - x)$$

1. Préciser le domaine de définition de $f(x)$.

2. Ecrire le développement limité de $f(x)$ en 0.

3. Calculer la limite de la fonction $g(x) = ln(1 - x^n)$ quand $x \to 1$.

4. On étudie à présent la suite d'intégrales de terme général :

$$I_n = \int_a^b x^{2n} ln(1 - x^n) dx$$

   a. .Montrer que I_n est définie sut l'intervalle [0,1] pour tout rang $n \geq 1$. Retenir ces valeurs par la suite.
   b. On pose $z = x^n$. Réécrire I_n en fonction de z.
   c. Utiliser le résultat obtenu à la question 4 pour obtenir une nouvelle expression de I_n et résoudre.
   d. Etudier la comportement de I_n quand $n \to +\infty$.

II. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel (3 points)

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1. Trouver les vecteurs directeurs v_1 et v_2 des droites orthogonales aux hyperplans d'équations respectives $x + y + z + t = 0$ et $x - y + z - t = 0$.

2. Que représente le plan engendré par (v_1, v_2) ? Quelle est sa dimension ?

3. Construire la matrice de projection orthogonale sur F.

4. Calculer la distance d'un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ au sous-espace vectoriel F.

5. Montrer que les vecteurs $v_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $v_4 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ forment une base orthonormée pour F.

6. Recalculer la distance de u à F à l'aide de la base précédente.

III. Polynômes (3 points)

Soient $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, $Q(x) = 2x - x^2$ et $R(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ trois polynômes de x de $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver les racines des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.
2. Montrer que $(P(x), Q(x), R(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Exprimer le polynôme $S(x) = ax^2 + bx + c$ dans la base $(P(x), Q(x), R(x))$.
4. Exprimer le polynôme $T(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + \gamma R(x)$ dans la base $(1, x, x^2)$.
5. Pour tout k, l et m réels, montrer l'unicité du polynôme de $U(x)$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} U(0) = k \\ U(1) = l \\ U(2) = m \end{cases}$$

IV. Calcul matriciel (3 points)

Soit la matrice A est définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B. : Dans les questions qui suivent, $\mathbf{M}^t$ désigne la matrice transposée d'une matrice $\mathbf{M}$ donnée.

1. La matrice **A** est-elle : carrée ? symétrique ? de rang plein ? inversible ?

2. Calculer $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$. Quels liens mettre en évidence avec **A** ?

3. Trouver les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$.

4. Calculer $\mathbf{A}^n$ pour n entier non-nul.

V. Etude dynamique (4 points)

Soit y la surface d'une colonie de bactérie en centimètres carrés (cm^2) fonction de son âge x mesuré en jours (j). La variation de la surface occupée par la colonie bactérienne est régie par l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$$

Sachant que a et b sont deux paramètres réels strictement positifs constants

1. Comment interpréter les paramètres a et b ?

2. Quelle est le degré de cette équation différentielle ? Est-elle linéaire ? Est-elle homogène ?

3. Montrer que la solution y est de la forme :

$$y(x) = \frac{\alpha}{1 + e^{\beta x}}$$

en précisant les expressions des paramètres α et β (*nota bene* : e désigne la fonction exponentielle).

4. On pose $a = 0{,}4$ et $b = 2$.

   a. Quelles sont les unités respectives de ces paramètres ?

   b. Quelle est la surface initiale de la colonie de bactéries (soit pour $x = 0$) ?

   c. La surface de la colonie converge-t-elle ? Dans l'affirmative, préciser la valeur limite. Dans le cas contraire, indiquer la nature de la divergence et la justifier.

d. Calculer le délai au bout duquel la surface aura progressé de 50% par rapport à sa taille initiale.

e. Construire le tableau de variation pour y en calculant ses dérivées jusqu'à l'ordre 2.

f. Dessiner la courbe représentative de la surface de la colonie bactérienne en fonction de son âge en précisant les asymptotes éventuelles.

VI. Optimisation (3 points)

Soient la fonction f définie par :

$$f(x,y) = ln(x-2) + \frac{5}{8}y^2 - xy + 1.$$

1. Trouver le gradient de la fonction f.

2. Trouver la matrice hessienne de la fonction f.

3. Rechercher le(s) extremum(s) de f, puis en discuter la nature.