



Centre National de Gestion

**CONCOURS OUVERTS LES 24, 25, 26 et 27 MAI 2016 POUR L'ADMISSION  
AU CYCLE DE FORMATION DES ÉLÈVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

**CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIÈME CONCOURS**

*VENDREDI 27 MAI 2016*

*4<sup>ème</sup> Épreuve écrite d'admissibilité*

*Durée : 4 heures - Coefficient : 3*

## **STATISTIQUES**

### **IMPORTANT –**

Dès la remise du sujet, les candidats sont priés de vérifier le nombre de pages et la numérotation.

**EXERCICES A TRAITER : 6 pages**

.../...

### EXERCICE I : fréquence empirique

On extrait  $n$  fois avec remise une boule dans une urne composée de deux boules vertes et six boules blanches. Soit  $X_n$  la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues lors des  $n$  tirages. On pose  $F_n = X_n/n$ .

1. Donner la loi de  $X_n$ .
2. En déduire l'espérance et la variance de  $X_n$ .
3. Calculer ces deux moments pour  $F_n$ .

### EXERCICE II : fonction de risque

Démontrer que l'erreur quadratique moyenne,  $R_{\hat{\theta}}(\theta) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ , peut s'exprimer en fonction de la variance et du biais d'un estimateur,  $\hat{\theta}$ .

### EXERCICE III : taux de change

On considère trois séries mensuelles du taux de change du dollar (exprimées en logarithme) sur la période allant de janvier 1990 à avril 2004. On désigne par : (i)  $EUR_t$  le taux de change (au mois  $t$ ) du dollar vis-à-vis de l'euro ; (ii)  $DKK_t$  le taux de change (au mois  $t$ ) du dollar vis-à-vis de la couronne danoise ; (i)  $ATS_t$  le taux de change (au mois  $t$ ) du dollar vis-à-vis du schilling autrichien ; avec  $t = 1, \dots, 172$ . On donne :

Variable	Moyenne	Écart-type
$EUR_t$	-0.1227	0.1278
$DKK_t$	1.8942	0.1242
$ATS_t$	2.4998	0.1304

Somme des carrés	Somme des produits
$\sum_{t=1}^{172} EUR_t^2 = 5.3820$	$\sum_{t=1}^{172} EUR_t * DKK_t = -37.3106$
$\sum_{t=1}^{172} DKK_t^2 = 619.7721$	$\sum_{t=1}^{172} EUR_t * ATS_t = -49.9646$
$\sum_{t=1}^{172} ATS_t^2 = 1077.7743$	$\sum_{t=1}^{172} DKK_t * ATS_t = 817.2116$

1. Calculer le coefficient de variation des trois séries. Commenter.
2. Calculer les coefficients de corrélation entre  $DKK$  et  $EUR$  d'une part, puis entre  $DKK$  et  $ATS$  d'autre part. Commenter les résultats obtenus.

3. On considère le modèle mettant en relation  $DKK$  et  $EUR$ .

a. Déterminer, par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO), les valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  de la droite de régression :  $\overline{DKK}_t = aEUR_t + b$ .

b. Selon ce modèle, quel est l'effet d'une augmentation de 1% du taux de change du dollar vis-à-vis de l'euro sur celui du dollar vis-à-vis de la couronne danoise ?

c. On désigne par  $e_t$  le  $t^{\text{ième}}$  résidu de l'ajustement obtenu et on donne :

$$\sum_{t=1}^{172} e_t^2 = 0.1169$$

En décrivant l'équation d'analyse de la variance, déterminer la valeur de la variance expliquée. Quelle est la part de la variance résiduelle dans la variance totale.

d. Calculer et interpréter la valeur du coefficient de détermination de la régression.

e. Que devient le coefficient  $a$  si l'on multiplie par 10 toutes les valeurs observées des variables  $EUR$  et  $DKK$  ? Même question si, au lieu de multiplier par 10, on ajoute 10 à chacune des valeurs observées des deux variables.

4. On s'intéresse désormais à la relation entre  $DKK$  et  $ATS$ . L'application de la méthode des MCO a conduit aux résultats suivants :  $\overline{DKK}_t = 0.9474 * ATS_t - 0.4741$ . Sachant que la variance de la variable ajustée de ce modèle est égale à 0.0153, calculer la valeur de la somme des carrés des résidus. Calculer le coefficient de détermination de cette nouvelle régression.

5. Comparer les résultats numériques obtenus pour les deux modèles qui font l'objet des questions 3 et 4 ci-dessus et conclure.

#### EXERCICE IV : jeu télévisé

Lors d'un jeu télévisé, un candidat répond systématiquement au hasard aux questions qui lui sont posées. Le jeu comporte 5 questions successives à trois choix. Toute réponse fautive est éliminatoire, et le candidat ne peut pas se retirer volontairement.

1. Déterminez la loi de la variable aléatoire  $X$  qui associe au candidat le "nombre de réponses correctes".

2. Calculez  $E(X)$  et  $Var(X)$ .

3. Si le candidat fournit au moins une bonne réponse, il reçoit à la fin du jeu un gain en euros égal à  $G=2^{X-1}$ . Calculez  $E(G)$ .

### EXERCICE V : indépendance

Le tableau ci-dessous consigne la distribution conjointe de deux variables qualitatives  $X$  et  $Y$ . La variable  $X$  a quatre modalités ( $A, B, C, D$ ), la variable  $Y$  présente trois modalités (rouge, vert, jaune). Ces deux variables sont-elles indépendantes au seuil de 2.5% ?

	Rouge	Vert	Jaune	Ensemble
A	40	20	20	<b>80</b>
B	30	30	10	<b>70</b>
C	25	22	25	<b>72</b>
D	60	57	35	<b>152</b>
Ensemble	<b>155</b>	<b>129</b>	<b>90</b>	<b>374</b>

### EXERCICE VI : test de proportion et puissance

Le cahier des charges du principal client d'un fabricant de cartes à puces impose une proportion de cartes défectueuses dans la production totale, inférieure ou égale à 0.5%. Suite à une livraison, un client prétend que celle-ci contient 0.7% de cartes défectueuses. Le fournisseur décide de poser le test suivant :

$H_0$  : la proportion de cartes défectueuses est égale à 0.5%

$H_1$  : la proportion de cartes défectueuses est supérieure à 0.5%

Dans un échantillon de taille 1000, six cartes s'avèrent défectueuses. Nous admettrons, dans le cas présent, que les conditions d'approximation de la loi binomiale par une loi normale sont satisfaites et que le coefficient d'exhaustivité pourra être ignoré.

1. Effectuez le test proposé par le fournisseur au seuil de 2%.
2. Calculez le risque de deuxième espèce de ce test, en considérant que  $H_1$  est désormais l'affirmation du client (proportion=0.7%). A partir de quel nombre de cartes à puces défectueuses sur notre échantillon nous aurions rejeter l'hypothèse  $H_0$  ? En déduire la puissance du test. Commentez.

### EXERCICE VII : proportion de malades

Une pathologie est présente chez 1% des individus d'une population. Soit  $M_i$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le  $i^{\text{ème}}$  individu présente la pathologie et 0 sinon. En supposant que le taux de sondage est inférieur à 10% et que l'on dispose d'un échantillon de 100 individus.

1. Quelle loi suivent les variable aléatoires  $M_i$  ? En déduire le nombre moyen de malades.

2. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun malade ?

3. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins cinq ? Quelle autre loi auriez-vous pu utiliser dans ce cas.

**ANNEXE : TABLES STATISTIQUES**

*Loi de Laplace-Gauss centrée réduite,  $F(t) = P[T \leq t]$*

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997

**Loi du Khi-deux de Pearson,  $F(k)=p[K \leq k]$**

$n \backslash F(k)$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99
1	0,00	0,00	0,02	0,06	0,15	0,27	0,45	0,71	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,10	0,21	0,45	0,71	1,02	1,39	1,83	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,35	0,58	1,01	1,42	1,87	2,37	2,95	3,66	4,64	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,71	1,06	1,65	2,19	2,75	3,36	4,04	4,88	5,99	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	1,15	1,61	2,34	3,00	3,66	4,35	5,13	6,06	7,29	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,64	2,20	3,07	3,83	4,57	5,35	6,21	7,23	8,56	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	2,17	2,83	3,82	4,67	5,49	6,35	7,28	8,38	9,80	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,73	3,49	4,59	5,53	6,42	7,34	8,35	9,52	11,03	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	3,33	4,17	5,38	6,39	7,36	8,34	9,41	10,66	12,24	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,94	4,87	6,18	7,27	8,30	9,34	10,47	11,78	13,44	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	4,57	5,58	6,99	8,15	9,24	10,34	11,53	12,90	14,63	17,28	19,68	21,92	24,72
12	3,57	5,23	6,30	7,81	9,03	10,18	11,34	12,58	14,01	15,81	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,89	7,04	8,63	9,93	11,13	12,34	13,64	15,12	16,98	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	6,57	7,79	9,47	10,82	12,08	13,34	14,69	16,22	18,15	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	7,26	8,55	10,31	11,72	13,03	14,34	15,73	17,32	19,31	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	7,96	9,31	11,15	12,62	13,98	15,34	16,78	18,42	20,47	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	8,67	10,09	12,00	13,53	14,94	16,34	17,82	19,51	21,61	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	9,39	10,86	12,86	14,44	15,89	17,34	18,87	20,60	22,76	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	10,12	11,65	13,72	15,35	16,85	18,34	19,91	21,69	23,90	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	10,85	12,44	14,58	16,27	17,81	19,34	20,95	22,77	25,04	28,41	31,41	34,17	37,57

**Loi de Student,  $F(t)=p[T \leq t]=1-\alpha/2$**

$n \backslash \alpha$	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	63,6567	25,4517	12,7062	6,3138	0,1584	0,0787	0,0393	0,0157
2	9,9248	6,2053	4,3027	2,9200	0,1421	0,0708	0,0354	0,0141
3	5,8409	4,1765	3,1824	2,3534	0,1366	0,0681	0,0340	0,0136
4	4,6041	3,4954	2,7764	2,1318	0,1338	0,0667	0,0333	0,0133
5	4,0321	3,1634	2,5706	2,0150	0,1322	0,0659	0,0329	0,0132
6	3,7074	2,9687	2,4469	1,9432	0,1311	0,0654	0,0327	0,0131
7	3,4995	2,8412	2,3646	1,8946	0,1303	0,0650	0,0325	0,0130
8	3,3554	2,7515	2,3060	1,8595	0,1297	0,0647	0,0323	0,0129
9	3,2498	2,6850	2,2622	1,8331	0,1293	0,0645	0,0322	0,0129
10	3,1693	2,6338	2,2281	1,8125	0,1289	0,0643	0,0321	0,0129
14	2,9768	2,5096	2,1448	1,7613	0,1280	0,0638	0,0319	0,0128
19	2,8609	2,4334	2,0930	1,7291	0,1274	0,0635	0,0318	0,0127
20	2,8453	2,4231	2,0860	1,7247	0,1273	0,0635	0,0317	0,0127
50	2,6778	2,3109	2,0086	1,6759	0,1263	0,0630	0,0315	0,0126

**Loi de Fisher-Snedecor, pour  $\alpha=0,05$ ,  $F(x)=p[X \leq x]$**

$n_2/n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	248,01	250,10
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,45	19,46
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,62
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,75
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,50
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,81
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,44	3,38
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,15	3,08
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,94	2,86
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,70
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	2,04
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	1,93	1,84

**Loi de Fisher-Snedecor, pour  $\alpha=0,025$ ,  $F(x)=p[X \leq x]$**

$n_2/n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28	968,63	993,10	1001,41
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,45	39,46
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,17	14,08
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,56	8,46
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,33	6,23
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,17	5,07
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,47	4,36
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,00	3,89
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,67	3,56
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,42	3,31
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,46	2,35
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,20	2,07