CONCOURS OUVERTS LES 24-25-26-27 MAI 2016 POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL

CONCOURS EXTERNE – INTERNE ET TROISIEME CONCOURS

JEUDI 26 MAI 2016

3ème épreuve écrite d'admissibilité

Durée : 4 heures - Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

IMPORTANT : Dès la remise du sujet, les candidats sont priés de vérifier le nombre de pages et la numérotation.

EXERCICES A TRAITER : les 4 pages suivantes

I. Fonctions, suites et séries

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction $f(x) = ln(x)$.

2. Dresser son tableau de variation en calculant ses limites et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2.

3. Trouver le développement de Taylor à l'ordre 3 de $f(x)$ en $x = 10$.

4. Tracer la courbe représentative de $f(x)$ et les deux demi-droites d'équations respectives $g(x) = x$ et $h(x) = x - 1$ en précisant les asymptotes pour *f*.

5. Déterminer les coordonnées du point de tangence entre $f(x)$ et $h(x)$.

6. Montrer que la fonction $k(x) = 2\sqrt{x}$ est un majorant pour la fonction $f(x)$

7. Pour tout entier n, on considère la suite (u_n) de terme général $u_n = n - \ln(n)$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$. Montrer que, (u_n) est croissante.

8. Trouver la limite de (u_n) quand n→+ ∞.

9. (u_n) est-elle absolument convergente ?

10. Comment se comporte la série donnée par : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - ln(n)}$?

II. Système d'équations

Soient les scalaires réels (ρ,θ) et les inconnues réelles (L_1, L_2, K_1, K_2). On considère le système :

$$\begin{cases} K_1 + \theta K_2 + \rho L_1 = 1 - \theta \\ L_2 + \theta L_1 + \rho K_2 = 1 + \theta \\ L_1 + \theta L_2 + \rho K_1 = \rho - \theta \\ K_2 + \theta K_1 + \rho L_2 = \rho + \theta \end{cases}$$

1. Le système d'équation est-il linéaire ?

2. Ecrire le système sous la forme matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ en précisant les éléments.

3. Trouver l'expression du déterminant de $\mathbf{A}$, noté $|\mathbf{A}|$.

4. Sous quelle(s) condition(s) $|\mathbf{A}| = 0$?

5. Trouver alors l'ensemble-solution à chaque cas identifié précédemment en admettant que $\theta = 1$.

III. Espaces vectoriels

Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0 \text{ et } x+2y+z=0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On admet que F forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Soient trois vecteurs $e_1 = (1,-1,1)$, $e_2 = (-2,-1,1)$ et $e_3 = (-1,0,2)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Trouver une famille génératrice de E. S'agit-il d'une famille libre ?

3. $\{e_2, e_3\}$ est-elle une base de F ?

4. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

5. Vérifie-t-on que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

6. Exprimer le vecteur $u=(x,y,z)$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

IV. Matrices et endomorphismes

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $bcd \neq 0$. La matrice A est définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

N.B. : Dans les questions qui suivent, $\mathbf{M}^t$ désigne la matrice transposée d'une matrice $\mathbf{M}$ donnée.

1. Calculer $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$, $\mathbf{AA^t}$, puis $(\mathbf{A} - \mathbf{XI})\ (\mathbf{A^t} - \mathbf{XI})$ sachant *I* est la matrice identité conforme.

2. En déduire le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.

3. Montrer que $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer $\mathbf{A}^2 - (2a)\mathbf{A} + (a^2 + b^2 + c^2)$.

5. En déduire le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

6. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

7. On considère à présent les valeurs : $a = 1$ et $b = c = d = -1$. Vérifier que les vecteurs colonnes $v_1 = \left(i\sqrt{3}, 1,1,1\right)^t$ et $v_2 = \left(-i\sqrt{3}, 1,1,1\right)^t$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

8. Montrer que $\mathbf{A}^3 = -8\mathbf{I}$

9. En déduire l'expression de $\mathbf{A}^n$ en fonction de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{I}$.

V. Optimisation

1. Soient le scalaire k ∈R. On considère la fonction dépendant du paramètre k définie par :

$$f(x, y; k) = x^2 + y^2 + kxy - 2x - 2y.$$

2. Trouver le gradient et la matrice hessienne de la fonction f.

3. A quelle condition sur k, la fonction f est-elle convexe ? Pour quelles valeurs de ce paramètre cette fonction est-elle strictement convexe ?

4. Discuter de l'existence de solutions au problème d'optimisation $min_{x,y}\ f(x, y; k)$ en fonction des valeurs du paramètre k.

5. Résoudre le problème précédent quand $k = 1$.