Centre National de Gestion

CONCOURS OUVERTS LES 11, 12, 13 et 14 juin 2018
POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'ETABLISSEMENTS SANITAIRES, SOCIAUX ET MEDICO-SOCIAUX

CONCOURS INTERNE, EXTERNE et 3ème CONCOURS

3ème EPREUVE D'ADMISSIBILITE
(Durée 4 heures – Coefficient 3)

Mercredi 13 juin 2018

MATHEMATIQUES

SUJET :

Le sujet comporte 4 pages + celle-ci.

Le barème est donné à titre indicatif.
Le candidat est invité à lire le sujet dans son intégralité.

Exercice 1. *(4 points)*

On considère les matrices suivantes de $M_2(\mathbb{R})$:

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$, on note f_A l'application

$$f_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA.$$

1. Montrer que les matrices $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ forment une base de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A \in M_2(\mathbb{R})$, f_A est une application linéaire.
3. *Dans toute la suite on prendra* $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -12 & -9 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les images de $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ par f_A. En déduire la matrice U de f_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base du noyau $\ker(f_A)$ de f_A.
   (c) Quelle est la dimension de l'image de f_A ? Déterminer une base de l'image de f_A.
   (d) Déterminer les valeurs propres de la matrice A. On les notera λ_1 et λ_2 en prenant $\lambda_1 > \lambda_2$.
   (e) Établir que $\lambda_+ = \lambda_1 - \lambda_2$ et $\lambda_- = \lambda_2 - \lambda_1$ sont des valeurs propres de U et calculer les sous-espaces propres associés E_+ et E_-.
   (f) Quelles sont les valeurs propres de U ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. *(4 points)*

On considère la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ et la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) i. Établir le tableau de variations de f.
   ii. Montrer que pour $n \geqslant 0$ on a $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+2}$.

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

(b) Déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = n.u_n$ est croissante.

(c) Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite finie l et que $l \in]0, 1]$.

(d) On définit la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ par $d_n = n(v_{n+1} - v_n)$.

i. Pour $n \geqslant 0$, exprimer d_n en fonction de u_n et v_n.

ii. Établir que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ a une limite finie que l'on exprimera en fonction de l.

2. (a) Soit $(t_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante telle que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n > n_0, t_{n+1} - t_n \geqslant \frac{a}{n}.$$

i. Montrer que pour tout $n > n_0$ on a $t_{2n} - t_n \geqslant \frac{a}{2}$.

ii. En déduire que $(t_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

(b) Démontrer que pour $l \neq 1$, la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie les même conditions que la suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ ci-dessus. *On pourra utiliser la définition de la convergence d'une suite.*

(c) Que vaut l ?

Exercice 3. *(5 points)*

On définit les fonctions f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit D l'ensemble des réels x tels que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ soit convergente. Montrer que $D = \mathbb{R}_+^*$.
   Dans la suite on note f la fonction définie sur D par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$?
4. On souhaite montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. On fixe $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que pour tous $n \geqslant N$ et $x \in [1, +\infty[$ on ait

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, calculer $\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

(c) Conclure.

5. On veut maintenant étudier le comportement de f au voisinage de 0. On fixe $x > 0$.

(a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = e^{-x\sqrt{t}}$. Pour des réels $0 < a \leqslant b$, calculer l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ en faisant le changement de variable $u = x\sqrt{t}$ puis une intégration par parties.

(b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ on a $f_n(x) \geqslant \int_n^{n+1} g(t)dt \geqslant f_{n+1}(x)$.

(c) Déduire de ce qui précède un encadrement de $f(x)$.

(d) Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$, c'est à dire que $\frac{x^2}{2} f(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$ $(x > 0)$.

Exercice 4. *(7 points)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ des réels. On suppose $x_1 \neq x_2$. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(a,b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i.a + b - y_i)^2$. Le but de l'exercice est de minimiser f sur $\mathbb{R}^2$. On propose d'aborder le problème de deux manières différentes : dans la partie I, *via* la recherche des points critiques de f, et dans la partie II en identifiant un problème de projection orthogonale dans un espace préhilbertien. Les deux parties sont indépendantes. On termine avec une question d'interprétation géométrique.

Dans la suite on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, *i.e.* on a $\langle w, w' \rangle = \sum_{i=1}^n w_i.w'_i$ pour $w = (w_i)_i, w' = (w'_i)_i \in \mathbb{R}^n$, et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne : $\|w\| = \langle w, w \rangle = {}^t w.w = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}$.

Partie I

1. On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.
   (a) Calculer ${}^tA.A$. Cette matrice est-elle symétrique ?
   (b) Montrer que $\ker(A) = \{0\}$.
   (c) Montrer que si $z \in \mathbb{R}^2$ vérifie $({}^tA.A).z = 0$ alors $\|A.z\| = 0$. En déduire que ${}^tA.A$ est inversible.
2. Montrer que pour un point $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ le gradient $\nabla_f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a}(z) \\ \frac{\partial f}{\partial b}(z) \end{pmatrix}$ de f en z est $\nabla_f(z) = {}^tA.\left(A.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y\right)$.
3. Montrer que la fonction f admet un unique point critique, noté $\bar{z}$ (on ne demande pas un calcul explicite de $\bar{z}$).
4. On note $H_f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(z) & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(z) & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(z) \end{pmatrix}$ la Hessienne de f en un point $z \in \mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $H_f(z) = {}^tA.A$ pour tout $z \in \mathbb{R}^2$.

(b) En déduire que $\bar{z}$ est l'unique minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$ (c'est en fait un minimum global mais on ne demande pas de le démontrer ici).

Partie II

On note

$$\Phi = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} (2.f(a,b)) = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i.a + b - y_i)^2 \right).$$

1. Soit $\mathcal{F} = Vect(X, U)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par X et U. Soit p_Y le projeté orthogonal de Y sur $\mathcal{F}$.
   (a) Établir l'égalité $\|w - Y\|^2 = \|w - p_Y\|^2 + \|p_Y - Y\|^2$ pour $w \in \mathcal{F}$.
   (b) Montrer que $\Phi = \inf_{w\in\mathcal{F}} \|w - Y\|^2$.
   (c) En déduire que $\Phi = \|p_Y - Y\|^2$.
2. Montrer que X et U ne sont pas colinéaires. On note maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées de p_Y dans la base (X, U) de $\mathcal{F}$.
3. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - n. \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0.$$

4. En utilisant la propriété $Y - p_Y \in \mathcal{F}^\perp$, exprimer les valeurs de a et b en fonction des x_i et des y_i.

Interprétation géométrique

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ on appelle M_i le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées cartésiennes (x_i, y_i). Interpréter géométriquement le fait de minimiser f sur $\mathbb{R}^2$.