CONCOURS OUVERTS LES 13, 14, 15 et 16 JUIN 2017
POUR L'ADMISSION AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'ETABLISSEMENTS SANITAIRES, SOCIAUX ET MEDICO-SOCIAUX

CONCOURS INTERNE, EXTERNE et 3$^{\text{ème}}$ CONCOURS

3$^{\text{ème}}$ EPREUVE D'ADMISSIBILITE
(Durée 4 heures – Coefficient 3)

Jeudi 15 juin 2017

MATHEMATIQUES

Sujet à traiter : 5 pages dont celle-ci.

I. Suites et séries de fonctions 4 POINTS

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^n e^{-t}}{n!}, & t \geq 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\lim_{t \to +\infty} t^2 f_n(t) = c$, avec c une constante finie à préciser. 0,25 POINT
2. En déduire que l'intégrale $I_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$ converge quand x tend vers $+\infty$. 0,5 POINT
3. Montrer la récurrence : $\forall n \in N^*$, $\forall x \in [0; 1[$, $I_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. 0,5 POINT
4. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} I_n(x) = k \quad \forall n \in N$, avec k valeur finie à déterminer. 0,25 POINT
5. Montrer que f_n mesure la densité de probabilité d'une variable aléatoire d'une variable aléatoire X_n, $\forall n \in N^*$. 0,5 POINT
6. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X_n en fonction de n. 1 POINT

Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t de loi de Poisson $\mathcal{P}(t)$, relative au nombre de patients arrivant à l'accueil d'un établissement sanitaire et social entre l'instant 0 et l'instant t.

7. En déduire que f_n est la loi de probabilité de Y_t. 0,5 POINT

$\forall n \in N^*$, soit la variable aléatoire réelle Z_n, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, mesurant l'instant d'arrivée du n-ième patient à partir de l'instant 0.

8. Justifier l'égalité entre les événements $(Z_n \leq t)$ et $(Y_t \geq n)$. 0,5 POINT

II. Etude de fonctions et intégrale 4 POINTS

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x}\,.$$

1. Etudier les limites de f aux bornes de son domaine. 0,25 POINT
2. Dresser le tableau de variation de f. 0,5 POINT

Soit la fonction F définie par :

$F(x) = \int_2^x f(s)\, ds$.

3. Donner l'expression de $F(x)$, puis construire le tableau de variations de F en étudiant sa limite en $+\infty$. 0,5 POINT
4. Etablir l'encadrement : $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$. 0,25 POINT

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = e^{-x}$.

5. Tracer les courbes représentatives de f et g, notées respectivement (C) et (Γ), et étudier leurs positions pour $x \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{17}{4}\right]$. 0,5 POINT

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

6. Ecrire h en fonction de f et de g. 0,25 POINT
7. Soit le réel $\alpha \geq 1$. Calculer l'aire $I(\alpha)$ délimitée par les courbes et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. En donner l'illustration sur le graphique précédent pour $\alpha = 3$. 0,5 POINT
8. Etudier la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$. 0,25 POINT
9. Pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation y = m coupe la courbe (C) au point $P(x_P\,;\, m)$ et la courbe (Γ) au point $Q\ (x_Q\,;\, m)$.
   Montrer qu'il existe une seule valeur de $x_P \leq -1$ telle que la distance PQ soit égale à 1. **1 POINT**

III. Espaces vectoriels 4 POINTS

Soit l'espace vectoriel

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid\ x + y + z - t = 0\,;\ x - 2y + 2z + t = 0\,;\ x - y + z = 0\}$$

Soit également $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid\ 2x + 6y + 7z - t = 0\}$

On considère les vecteurs :

$v_1 = (2,1,-1,2)$; $v_2 = (1,1,-1,1)$; $v_3 = (-1,-2,3,7)$; $v_4 = (4,4,-5,-3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de E. 0,5 POINT
2. En déduire la dimension de E. 0,5 POINT
3. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$. 0,5 POINT
4. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. 0,5 POINT
5. Déterminer une base de F. 0,5 POINT
6. Déterminer $E \oplus F$ et conclure. 0,5 POINT
7. Montrer que $F = Vect(v_2, v_3, v_4)$. 0,5 POINT
8. Soit $u = (x, y, z, t) \in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de v_2, v_3 et v_4. 0,5 POINT

IV. **Matrices et endomorphismes** 4 POINTS

Soit la matrice carrée réelle : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice est M dans la base canonique B = (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que M n'est pas inversible, puis que 0 est valeur propre de M. **0,5 POINT**
2. Calculer les puissances M^2, M^3, M^4. 0,75 POINT
3. Montrer que 0 est la seule valeur propre de f. 0,25 POINT
4. Déterminer la dimension du noyau de f. 0,5 POINT
5. f est-elle diagonalisable ? 0,5 POINT
6. Soit $C = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ tel que :

   $u_1 = e_1$; $u_2 = f(u_1)$; $u_3 = f(u_2)$; $u_4 = f(u_3)$.

   a. Montrer que C forme une base de $\mathbb{R}^4$. 0,5 POINT

   b. Déterminer la matrice P de f dans la base C de $\mathbb{R}^4$. 0,5 POINT
7. Discuter l'existence d'un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que :

   $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$? 0,5 POINT

V. **Optimisation** 4 POINTS

Soit l'application g définie par :

$$g(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{1 - y - x^2}$$

1. Trouver le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté D_g, sur lequel g est définie. 1 POINT
2. Représenter graphiquement l'ensemble D_g. 0,5 POINT
3. Déterminer la frontière de D_g, notée Γ. 0,5 POINT
4. Trouver les points critiques de g à l'intérieur de D_g, et déterminer la valeur de f en ces points. **0,5 POINT**
5. Trouver le(s) maximum(s) et minimum(s) de g sur D_g. 0,5 POINT
6. Ecrire le développement de Taylor de g à l'ordre 1 au voisinage du point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 1 POINT