



Centre National de Gestion
des Praticiens Hospitaliers
et des Personnels de Direction de
la Fonction Publique Hospitalière

**CONCOURS OUVERTS LES 07, 08 ET 09 JUILLET 2009 POUR L'ADMISSION
AU CYCLE DE FORMATION DES ELEVES DIRECTEURS D'HÔPITAL**

CONCOURS EXTERNE ET INTERNE

2^{ème} EPREUVE D'ADMISSIBILITE

MERCREDI 08 JUILLET 2009

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures – Coefficient : 3

SUJET A TRAITER : (3 pages + celle-ci)

IMPORTANT : Dès la remise du sujet, les candidats sont priés de vérifier le nombre de pages et la numérotation.

Exercice 1. Fonction de variable aléatoire réelle et moments

a) On considère une variable aléatoire X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec } \theta \text{ un réel strictement positif.}$$

Déterminer et reconnaître la loi de probabilité de la variable transformée $Y = -\ln(X)$.

b) Soit Y une variable aléatoire distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ positif, notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

i) *Déterminer la fonction de répartition, puis la densité de la variable $Z = e^Y$ qui suit une loi de Pareto désignée par $P(\lambda, 1)$.*

ii) *Déterminer la fonction de répartition, puis la densité de la variable $W = Y^{1/\alpha}$ qui suit une loi de Weibull notée $W(\alpha, \lambda)$.*

iii) *Calculer l'espérance mathématique de Z , puis celle de W .*

Exercice 2. Convergence d'une suite

On définit les suites suivantes, U_n avec n entier :

- a) $U_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$
- b) $U_n = \frac{1}{2} \frac{U_{n-1} + 1}{U_{n-1} + 3}$ avec $U_0 = 0$
- c) $U_n = \sqrt{4 + U_{n-1}} - 2$ avec $U_0 = 3$

Ces suites sont-elles convergentes ? Si oui, préciser la limite.

Exercice 3. Couple de variables aléatoires

Un analyste sur le marché des changes (un cambiste) étudie l'évolution du cours entre deux devises, le dollar américain et le yuan chinois. Sachant que les autorités chinoises ont décidé

d'ancrer leur monnaie au dollar, les variations de ce cours de change prennent la forme soit de dévaluations, soit de réévaluations.

Le nombre de révisions du cours de change est représenté par la variable aléatoire R et celui de dévaluations par la variable aléatoire D de telle sorte que pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in]0, 1[$:

$$P((R = n) \cap (D = k)) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}, \quad \forall (n, k) \text{ entiers}, 0 \leq k \leq n$$

- a) En utilisant notamment les propriétés des développements en série, montrer que l'expression précédente définit une loi de probabilité jointe pour le couple (D, R) .
- b) Déterminer les lois de probabilités marginales de D et de R .
- c) Les variables D et R sont-elles indépendantes ?
- d) Déterminer la loi de probabilité de D conditionnelle à R .
- e) Soit la variable aléatoire définie par $Z = R - D$.
 - i) Déterminer la loi de Z .
 - ii) Peut-on considérer les variables Z et D indépendantes ?

Exercice 4 : Système linéaire

Résoudre et discuter suivant les valeurs des paramètres réels a , b et c le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ (b + c)x + (a + c)y + (a + b)z & = 0 \\ bcx + acy + abz & = 0 \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre l'équation de récurrence régissant la dynamique de la variable X , et montrer que la solution est de type réel:

$$\begin{aligned} X(t+1) - 4X(t) + 5X(t-1) &= 6 \\ X(0) = X(1) &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 6. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R}^3 , définie par $f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$

1) Montrer que f est une application linéaire et déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Déterminer $\text{Ker}(f)$ et en donner une base. On notera u_1 le vecteur de cette base. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

2) Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$ et montrer que les vecteurs $u_2 = f(e_2) = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = f(e_3) = (1, 1, 2)$ en forment une base.

3) Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 2I)$ avec I matrice Identité.

4) Démontrer que $\mathcal{X} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice D de f dans cette base.

5) Donner une matrice P inversible telle que : $D = P^{-1}AP$.